



En el mundo de la empresa, las funciones ingreso, coste y beneficio son esenciales. Como es lógico, el empresario lo que buscará es minimizar costes, con el objetivo de maximizar tanto los ingresos, como los beneficios.

Si denotamos por $I(x)$ la función ingresos, $C(x)$ la función costes y $B(x)$ la función beneficios, la relación entre las tres será lógicamente $B(x) = I(x) - C(x)$. En los próximos cursos analizarás de una forma más profunda estas funciones hallando intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Pero cuando estas funciones son lineales o cuadráticas ya podemos averiguar muchos de estos aspectos.

Veámoslo con un ejemplo:

El coste de fabricación de una serie de hornos viene dado por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30\,000$, donde x representa el número de hornos fabricados. Supongamos que cada horno se vende por 490 euros.

Determinese la función de beneficios.

¿Cuántos hornos deben fabricarse y venderse para que los beneficios sean máximos? ¿Cuál es el importe de esos beneficios máximos?

¿Cuántos hornos se tienen que fabricar y vender como mínimo y como máximo para no incurrir en pérdidas?

La función ingresos será $I(x) = 490x$, con lo que la función beneficios será:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 490x - (x^2 + 40x + 30\,000) = -x^2 + 450x - 30\,000$$

Como la función beneficios es una función cuadrática con el término x^2 negativo, su vértice será el máximo absoluto de la función.

$$\text{Vértice: } x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-450}{-2} = 225 \quad ; \quad y_v = -225^2 + 450 \cdot 225 - 30\,000 = 20\,625$$

Con lo cual, habría que fabricar y vender 225 hornos para obtener un beneficio máximo de 20 625 €.

$$\text{Los puntos de corte de la función con eje } X \text{ serán } x = \frac{-450 \pm \sqrt{450^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-30\,000)}}{2 \cdot (-1)} \quad \square \quad \frac{-450 \pm 287,23}{-2} = \begin{cases} 81,38 \\ 368,62 \end{cases}$$

Con lo cual, teniendo en cuenta la forma convexa de la parábola, deben fabricar entre 82 y 368 hornos para no incurrir en pérdidas.

1. El beneficio anual (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche está determinada por la función $B(x) = -x^2 + 7x - 10$, donde x representa los hectolitros producidos en una semana. ¿Cuántos hectolitros debe producir para maximizar el beneficio? Calcular el beneficio máximo.