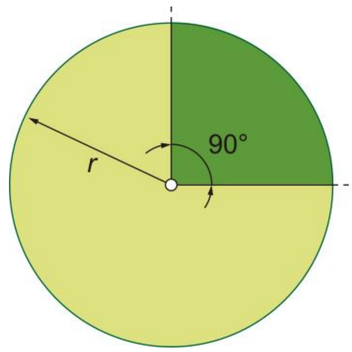
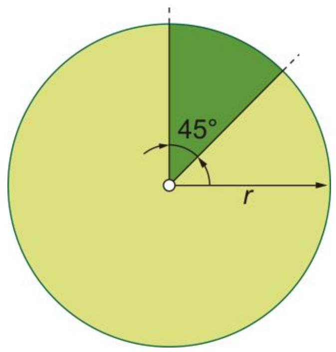
FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN**

De un solo corte

Las fracciones suelen ser representadas con ayuda de los **sectores circulares**: cada una de las partes en las que queda dividido un círculo al marcar en él distintos ángulos centrales.

Es sencillo calcular la fracción del área de un círculo que ocupa un sector circular, si conocemos su ángulo. En los dos ejemplos siguientes, la fracción de área coloreada es, respectivamente, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ del círculo.





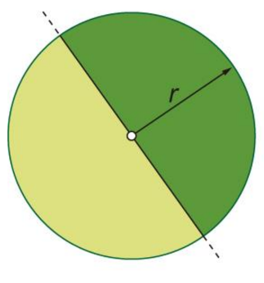
Efectivamente, si el área del círculo es πr^2, las áreas de los dos sectores son $\pi r^2 \cdot \frac{90}{360} = \frac{1}{4}\pi r^2$ y $\pi r^2 \cdot \frac{45}{360} = \frac{1}{8}\pi r^2$.

Si dividimos el círculo con un segmento cuyos extremos estén en la circunferencia, las partes en las que queda dividido se llaman **segmentos circulares**.

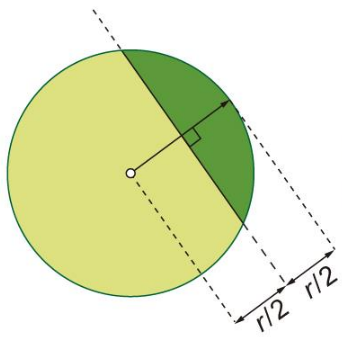
Al contrario que el área de los sectores circulares, calcular la fracción de área que ocupa cada segmento circular no es tan fácil en general. Tan solo en algunos casos concretos contamos con las herramientas necesarias para hacerlo. Una de las más útiles es el **teorema de Pitágoras**: identificamos en la figura triángulos rectángulos y calculamos sus catetos. Así, podemos obtener el área de estos triángulos, y restárselos al área del sector circular correspondiente, para obtener el área del segmento circular.

1. Determina el área de los siguientes segmentos circulares sombreados, y la fracción del área total del círculo que representan.

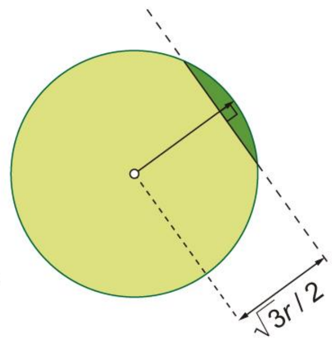
a)



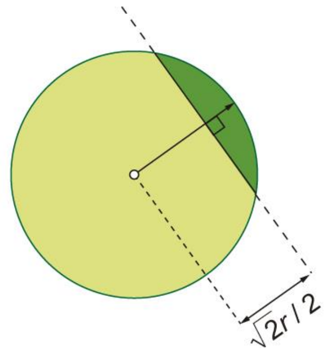
b)



c)

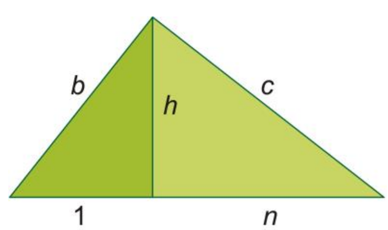


d)



a) El segmento pasa por el centro del círculo (ángulo abarcado por los extremos del segmento: 180º).
b) El segmento es la mediatriz de un radio del círculo (ángulo abarcado por los extremos del segmento: 120º).
c) El segmento está a $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ de distancia del centro (ángulo abarcado por los extremos del segmento: 60º).
d) El segmento está a $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ de distancia del centro (ángulo abarcado por los extremos del segmento: 90º).

Para aplicar los teoremas del cateto y de la altura en un triángulo rectángulo hace falta trazar la altura sobre la hipotenusa. Así se obtienen otros dos triángulos semejantes al primero por ser iguales sus ángulos correspondientes (son también triángulos rectángulos).

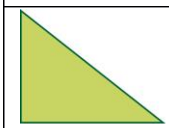
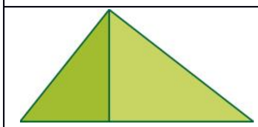


FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN**

De un solo corte

El cateto menor se convierte en la hipotenusa del triángulo menor (el verde oscuro en la figura), y el cateto mayor se convierte en la hipotenusa del triángulo mediano (el verde claro en la figura).

1. Completa la tabla siguiente con las variables que aparecen en la anterior figura (el triángulo mayor formado por los dos pequeños es rectángulo también).

	Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa
			
			
			

2. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el triángulo menor y el mediano? ¿Y entre el mediano y el mayor?

En el ejemplo concreto de la figura de arriba, los triángulos que aparecen al trazar la altura tienen una peculiaridad: la razón de semejanza entre el menor de los triángulos y el mediano **coincide** con la razón de semejanza entre el mediano y el mayor de ellos.

3. Escribe *b* como una potencia de *h* con ayuda de la propiedad anterior.

Vamos a intentar deducir cuánto miden los segmentos desconocidos a partir de este dato solamente. Según el teorema de Pitágoras en el triángulo mayor de la figura,

$$1^2 + h^2 = b^2$$

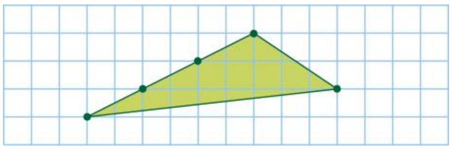
4. Utiliza la relación obtenida en el ejercicio 3 para convertir la expresión anterior en una ecuación con una sola incógnita y resuélvela. ¿Se pueden aceptar todas las soluciones?

Si el número que buscamos es un viejo conocido, llámalo por su nombre.

FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN**

De un solo corte

El **teorema de Pick** nos permite calcular áreas de **polígonos reticulares** (polígonos cuyos vértices tienen coordenadas enteras). Según este teorema, el área de este tipo de polígonos es igual a la suma del número de puntos reticulares interiores más la mitad de los puntos reticulares del borde, disminuida en una unidad.



El triángulo de la figura (que es un polígono reticulado) tiene 9 puntos reticulares en su interior, y 5 en su perímetro. Así, su área viene dada por:

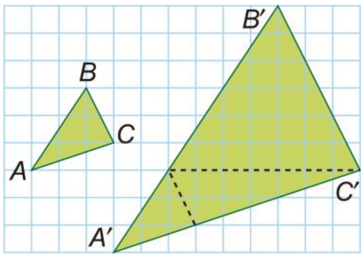
$$9+\frac{5}{2}-1=\frac{21}{2}=10{,}5$$ ua.

1. **Los triángulos ABC y A’B’C’ de la derecha son semejantes.**

a) ¿Cuál de las dos líneas discontinuas podemos aprovechar para sostener esa afirmación?

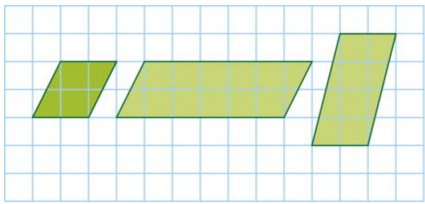
b) ¿Cuál es la razón de semejanza?

c) Calcula la superficie de ambos triángulos.



A lo largo de esta unidad hemos estudiado cómo se transforma el área de una figura plana cuando se contrae o se expande, dando lugar a una figura semejante. Pero, ¿qué ocurre cuando se «estira» a lo largo de uno solo de los ejes coordenados?

En la figura de la derecha, el paralelogramo de la izquierda se ha ampliado dando lugar a las otras dos figuras. La segunda figura se ha obtenido ampliando la escala en la dirección horizontal, mientras que la tercera se ha obtenido ampliando la escala en la dirección vertical (con respecto a la primera figura). En ambos casos se ha mantenido la escala del otro eje intacta.



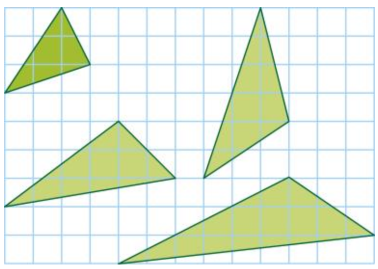
2. **Calcula el área de los tres paralelogramos. ¿Cuál es el factor de ampliación en cada caso?**

3. **Describe cómo afecta al área de una figura una dilatación en la dirección de uno solo de los ejes.**

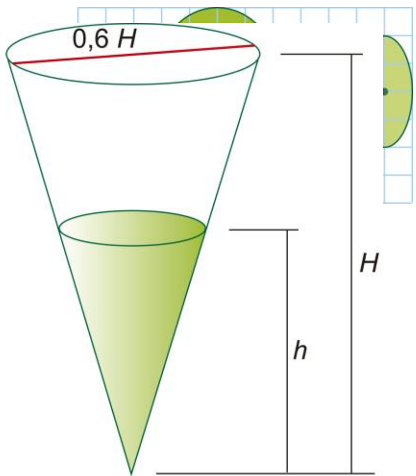
4. **Los triángulos verdes claro se han obtenido a partir del oscuro, que es igual que el triángulo *ABC* del ejercicio 1, dilatando por algún factor el eje horizontal o el vertical.**

a) ¿Cuál es este factor en cada uno de ellos?

b) ¿Cuál es el área de cada uno?



5. **La superficie de un círculo de radio 1 es π. Si ampliamos la figura con razón 2, obtenemos un círculo de superficie 4π. ¿Cuánto mide el área de las figuras ovaladas?**



Un depósito de agua tiene la forma de cono invertido como en la figura. La profundidad total del depósito es *H* y el diámetro de la base es 0,6*H*.

FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN** De un solo corte

2. ¿Cuál es la capacidad total del depósito?

Comenzando con el depósito vacío, vertemos agua a un ritmo constante. Más concretamente, el volumen almacenado al cabo de *t* segundos es de *t* mililitros. Es decir, el volumen de agua vertido (medido en mililitros) coincide con el tiempo transcurrido (medido en segundos).

Como el depósito tiene forma de cono invertido, al ser vertida el agua a un ritmo constante, el nivel sube cada vez más despacio. Esto se debe a que el fondo es estrecho y se rellena rápidamente, mientras que la parte superior del depósito tiene mayor sección y tarda más en llenarse.

3. Suponiendo que el nivel de agua ha ascendido hasta una altura de *h* centímetros, determina el volumen de agua almacenado.

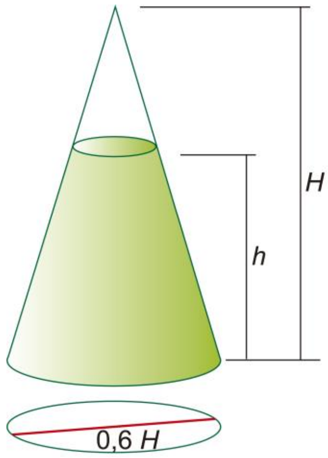
4. ¿Cuánto tiempo ha tardado en acumularse ese volumen?

5. Al cabo de *t* segundos desde que comenzamos a verter agua, ¿qué altura en centímetros se habrá alcanzado?

6. Completa la siguiente tabla de valores para el nivel del depósito a lo largo del tiempo y represéntala mediante una gráfica.

Tiempo *t* (s)	0	0,25	0,5	1	2	4	8	10
Nivel *h* (cm)								

7. Obtén la fórmula que determina el nivel alcanzado por el agua en función del tiempo si el depósito tiene forma de cono recto, como en la figura de la derecha.



8. La variación del nivel en los dos depósitos que hemos estudiado en esta ficha, ¿sería distinta si los conos correspondientes no fueran rectos, sino oblicuos?